

О МЕТОДЕ Г.Г.ТУМАШЕВА РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Н.Б.Ильинский

НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева

Казанского государственного университета

420008, Казань, ул. Университетская, 17

Nikolay.Ilinskiy@ksu.ru

Известно, что обратные краевые задачи аэрогидродинамики (ОКЗА) – это задачи нахождения формы профилей крыльев самолетов, судов на подводных крыльях, решеток турбомашин, обладающих заранее заданными аэродинамическими свойствами (см., напримср, [1–7]). В рамках выбранной математической модели течения такими свойствами могут быть безотрывность обтекания профиля, величина подъемной силы, аэродинамическое качество и другие.

Существенным моментом в постановке и решении обратных краевых задач в отличие от обычных, классических (теперь их называют прямыми) является то, функцией какого параметра задаются исходные граничные условия. В качестве таких параметров используются s – дуговая абсцисса искомого контура, x – абсцисса, θ – угол наклона касательной к искомому контуру (в задачах аэродинамики это аргумент вектора скорости), γ – полярный угол окружности, являющейся образом искомого контура во вспомогательной плоскости, и другие. От того, функцией какого параметра заданы граничные условия, зависят не только возможность реализации желаемых свойств и их физическая ясность, не только способ решения, но и разрешимость, т. е. существование и единственность решения поставленной задачи.

Основные достижения Г.Г.Тумашева в постановках и решениях ОКЗА связаны с задачами, в которых желаемое распределение скорости или давления по искомому контуру крылового профиля задавалось функцией параметра s . Простейшая из этих задач ставится следующим образом.

Пусть искомый крыловой профиль (рис. 1, а) обтекается плоским установившимся потоком жидкости с заданным значением v_∞ скорости на бесконечности. Контур L_z профиля предполагается замкнутым и гладким, за исключением задней кромки B , где внутренний к области течения угол равен $\pi\epsilon$, $1 \leq \epsilon \leq 2$. Вдоль L_z задано распределение скорости потока

$$v = v(s),$$

где $s \in [0, L]$ – дуговая абсцисса контура L_z , отсчитываемая от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в ней же так, что при возрастании s область течения остается слева; L – заданный периметр контура L_z (рис. 1, б). Функция $v(s)$ удовлетворяет условию Гельдера и непрерывно дифференцируема в точке A разветвления потока ($s = s_*$). Требуется определить форму профиля, угол атаки α , коэффициент подъемной силы C_y и другие аэродинамические характеристики.

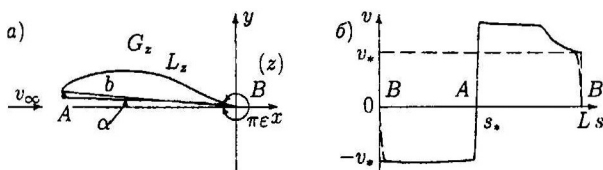


Рис. 1

Задача в такой постановке получила название основной ОКЗА. Ее решение сводится к нахождению аналитической функции $z(\zeta)$, осуществляющей конформное отображение канонической области (обычно это внешность круга единичного радиуса $|\zeta| > 1$ в плоскости $\zeta = re^{i\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$) на внешность искомого профиля в плоскости $z = x + iy$.

Использование при проектировочных расчетах такой постановки ОКЗА позволяет еще до решения задачи определить величину подъемной силы $R_y = \rho v_\infty \Gamma$, где $\Gamma = \int_0^L v(s) ds$ – циркуляция скорости, ρ – плотность среды в невозмущенном потоке. Далее, можно оценить величину коэффициента подъемной силы $C_y = R_y / (c \rho v_\infty^2 / 2)$, учитывая, что длина хорды b профиля, как правило, составляет $0,48 \div 0,49L$;

то есть $C_y \approx 4, 1\Gamma/(v_\infty L)$. Кроме того, можно точно оценить строение контура L_z в окрестности критических точек, а именно, определить радиус кривизны κ контура в передней критической точке $s_A = s_*$ ($\kappa \approx 2v_\infty/v'_s(s_A)$) и величину ε , характеризующую угол в задней кромке профиля B , которая связана с характером поведения скорости в окрестности этой точки соотношением $v(s) \sim -cs^{(2-\varepsilon)/\varepsilon}$, где c – некоторая константа. Наконец, можно провести расчет пограничного слоя и при отсутствии его отрыва оценить величину коэффициента профильного сопротивления, воспользовавшись, например, формулой Сквайра-Юнга: $C_x \approx 2(v_*/v_\infty)^{3,2}\delta_0^{**}/b$, где v_* и δ_0^{**} – соответственно значения скорости и толщины потери импульса в задней кромке профиля; следовательно, можно приближенно вычислить аэродинамическое качество $K = C_y/C_x \approx [\Gamma/(v_\infty\delta_0^{**})](v_\infty/v_*)^{3,2}$.

Выбранная параметризация скорости $v = v(s)$ позволяет, используя известные критерии безотрывности, задавать такие распределения скорости, которые обеспечивают безотрывное обтекание искомого контура, что способствует существенному уменьшению коэффициента сопротивления C_x и, соответственно, увеличению качества K . Так, например, для чисто ламинарного (ЛПС) или чисто турбулентного пограничного слоя (ТПС) условие безотрывности потока имеет вид

$$\left| \frac{av'(s)}{v(s)^b} \right| \left| \int_{s_*}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \geq \mu_1,$$

где a, b, μ_1 – эмпирические константы, различные для ЛПС и ТПС.

В.Манглер [1] при решении основной ОКЗА вводил функцию $\omega = \ln(dz/d\zeta)$, а Г.Г.Тумашев [3] – функцию $\chi(\zeta) = \ln(dw/dz)$, где $w(z) = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал течения, φ – потенциал скорости, ψ – функция тока.

Функция $\omega(\zeta)$ легла в основу математической теории ОКЗ для аналитических функций, основные достижения которой получены М.Т.Нужным (см., например, [5]). Использование функции $\chi(\zeta)$ при постановке и решении ОКЗА позволило Г.Г.Тумашеву впервые рассмотреть задачу построения контура крылового профиля в дозвуковом

потоке газа с учетом сжимаемости по модели газа Чаплыгина [2].

Если ввести в рассмотрение области G_w и G_ζ в плоскостях w (рис. 2, а) и ζ (рис. 2, б), конформно эквивалентные области течения G_z , то интегральное представление решения по В.Манглеру будет:

$$\omega(\zeta) = \ln \frac{dz}{d\zeta} = \ln \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| + i \arg \frac{dz}{d\zeta},$$

$$\omega_0(\zeta) = (\varepsilon - 1) \ln(1 - 1/\zeta), \quad \tilde{\omega}(\zeta) = \omega(\zeta) - \omega_0(\zeta) = \tilde{P} + i\tilde{Q},$$

$$\tilde{P}(\gamma) \equiv \operatorname{Re} \tilde{\omega}(e^{i\gamma}) = \ln \left| \frac{ds}{d\gamma} \right| - (\varepsilon - 1) \ln \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right), \quad \gamma \in [0, 2\pi],$$

$$\tilde{\omega}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{P}(\tau) \frac{e^{i\tau} + \zeta}{e^{i\tau} - \zeta} d\tau - i\beta,$$

$$z(\zeta) = e^{-i\beta} \int_1^\zeta (1 - 1/\zeta)^{\varepsilon-1} \exp \tilde{\omega}(\zeta) d\zeta, \quad |\zeta| \geq 1.$$

Здесь функция $\omega_0(\zeta)$ введена для устранения логарифмической особенности у функции $\omega(\zeta)$ в точке $\zeta = 1$, соответствующей задней кромке B ($z = 0$) искомого контура L_z крылового профиля. Положив в $z(\zeta)$ переменную $\zeta = e^{i\gamma}$ и разделив действительную и мнимую части, получим параметрические уравнения L_z ; β — это аргумент вектора скорости \vec{u}_0 набегающего потока на бесконечности в плоскости ζ .

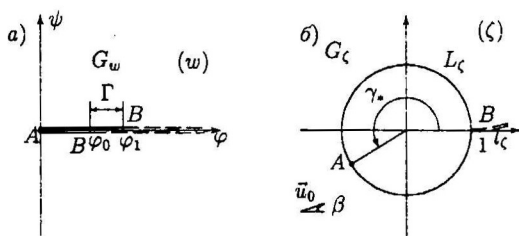


Рис. 2

Согласно методу Г.Г.Тумашева имеем:

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz} = \ln |v| - i\theta = S - i\theta,$$

$$\chi_0(\zeta) = (2 - \varepsilon) \ln(1 - 1/\zeta) + \ln(1 - \zeta_*/\zeta),$$

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta) = \tilde{S} - i\tilde{\theta}, \quad S(\gamma) = \ln |v[s(\gamma)]|,$$

$$\tilde{S}(\gamma) \equiv \operatorname{Re} \tilde{\chi}(e^{i\gamma}) = S(\gamma) - S_0(\gamma),$$

$$S_0(\gamma) \equiv \operatorname{Re} \chi_0(e^{i\gamma}) = (2 - \varepsilon) \ln \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right) + \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_*}{2} \right|,$$

$$\tilde{\chi}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) \frac{e^{i\tau} + \zeta}{e^{i\tau} - \zeta} d\tau,$$

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^{\zeta} (1 - 1/\zeta)^{\varepsilon-1} \exp[-\tilde{\chi}(\zeta)] d\zeta, \quad |\zeta| \geq 1.$$

Здесь функция $\chi_0(\zeta)$ служит для устранения логарифмических особенностей у функции $\chi(\zeta)$ в точках $\zeta = 1$ и $\zeta = \zeta_*$, соответствующих задней кромке B ($z = 0$) и точке разветвления потока A ($s = s_*$) на L_z ; θ – аргумент вектора скорости, $\theta_\infty = 0$.

Особенностью ОКЗА является то, что они являются некорректными по Адамару. Дело в том, что условия разрешимости задачи (условия замкнутости искомого контура и совпадение скоростей на бесконечности, заданной и определяемой в процессе решения) и условия физической реализуемости решения (в ОКЗА это условия однолиственности области течения) удастся выразить лишь через промежуточные функции $\tilde{P}(\gamma)$ в случае В.Манглера или $\tilde{S}(\gamma)$ в случае Г.Г.Тумашева. Так в случае В.Манглера условия замкнутости L_z имеют вид

$$\int_0^{2\pi} \tilde{P}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(\varepsilon - 1), \quad \int_0^{2\pi} \tilde{P}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0,$$

а условие совпадения скоростей на бесконечности –

$$\int_0^{2\pi} \tilde{P}(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln \frac{u_0}{v_\infty}.$$

В случае Г.Г.Тумашева соответственно будет

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(1 - \varepsilon), \quad \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_\infty.$$

Выразить эти условия непосредственно через распределение $v(s)$, $0 \leq s \leq L$, не удается.

Существенный шаг в разработке способа удовлетворения приведенным условиям был сделан путем построения квазирешения ОКЗА, базирующегося на теории квазирешений некорректных задач математической физики. Эти результаты изложены в монографии [7]. Достигнутое позволяет при проектировании крылового профиля ответить на следующие важные для практики вопросы.

1) Если свойства искомого профиля, выраженные через функцию $v(s)$, заданы с учетом физичности обтекания (т. е. реально), то решение ОКЗА позволяет построить контур этого профиля по явным формулам без итераций и приближений. Заметим, что прямыми методами решить такую задачу можно лишь путем подбора.

2) Если желаемые свойства идеализированы (физически не реальны), то решение ОКЗА сразу дает отрицательный ответ, т. е. контур получается либо разомкнутым, либо неоднолиственным и т. п. Прямыми методами подобрать профиль с такими свойствами вообще невозможно.

3) Применив аппарат квазирешений ОКЗА с идеализированными исходными данными, можно построить физически реальный единственный крыловой профиль, обладающий свойствами, минимально (в определенном смысле) отличающимися от заданных.

4) И, наконец, этот метод позволяет, отталкиваясь от какого-либо известного профиля, находить модифицированный профиль с улучшенными аэродинамическими характеристиками, например, срезая пики скоростей, приводящие к отрыву потока, или исправляя эпюру скоростей на диффузорном участке, обеспечивая безотрывное обтекание.

Продemonстрируем последнее на примере проектирования крылового профиля экраноплана [8].

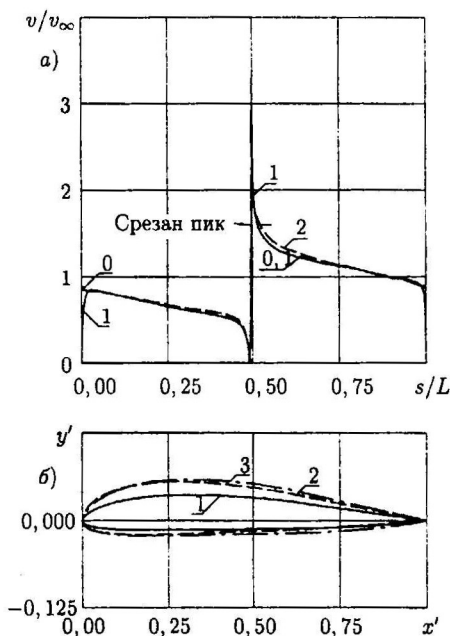


Рис. 3

Этот пример иллюстрирует проектировочные возможности разработанного метода. Суть их в следующем. Был рассмотрен профиль Clark-YH-5% (рис. 3, б, сплошная кривая 1) и проведен расчет его обтекания при $h' = h/b = 0,1$. Результаты показали, что уже при $\alpha > 2^\circ$ этот профиль обтекается с отрывом потока, начинающимся непосредственно с передней кромки профиля. Наличие отрыва объясняется тем, что с ростом угла атаки в распределении скорости по профилю появляется ярко выраженный пик с большими отрицательными градиентами. На рис. 3, а показано распределение $v(s)$ при $\alpha = 5^\circ$ (сплошная кривая 1), имеющее максимальное значение $v_{\max}/v_\infty = 3,3$. Для того чтобы избежать отрыва, пик скорости был срезан на уровне $v/v_\infty = 1,6$. Кроме того, для обеспечения соответствия задаваемого распределения скорости модели безотрывного ПС оно было исправлено в окрестности задней кромки так, чтобы $v(0) = -v(L) \neq 0$ (рис. 3, а, пунктирная кривая 0). По полученному таким образом распре-

делению $v(s)$ решена ОКЗА при числе Рейнольдса на бесконечности $Re_{\infty} = 10^6$. Построенный профиль и распределение скорости на нем изображены на рис. 3 штриховыми кривыми 2. Вследствие удаления пика найденный профиль имеет более закругленную переднюю кромку и, как следствие, бóльшую относительную толщину $c' = 7,52\%$.

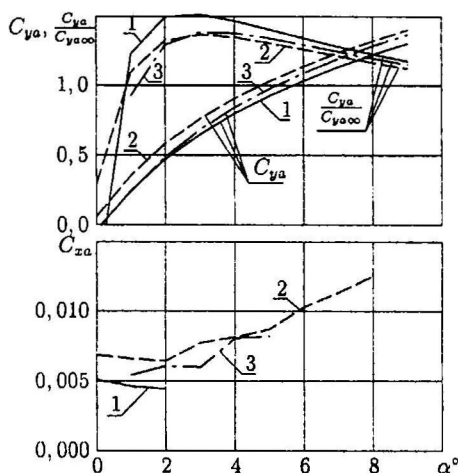


Рис. 4

Для сравнения характеристик построенного профиля с характеристиками профиля Clark-YH-5% и профиля Clark-YH-8%, близкого к найденному по толщине (рис. 3, а, штрих-пунктирная кривая 3), были проведены расчеты обтекания при $h' = 0,1$ по модели идеальной несжимаемой жидкости. Чтобы оценить величины коэффициента сопротивления (в диапазоне безотрывного обтекания), по получаемым для каждого угла атаки распределениям скорости рассчитывался пограничный слой и по формуле Сквайра-Юнга находились значения C_{xa} . Результаты этих расчетов приведены на рис. 4, где $C_{ya\infty}$ - значения C_{ya} для того же угла атаки, но при $h' = \infty$. Сплошные кривые 1 соответствуют профилю Clark-YH-5%, штриховые кривые 2 - модифицированному профилю, штрих-пунктирные кривые 3 - профилю Clark-YH-8%.

Сопоставление полученных результатов показало, что за счет увеличения толщины построенного профиля по сравнению с исходным произошло уменьшение экранного эффекта (максимального значения отношения $C_{ya}/C_{y\infty}$). Однако модифицированный профиль обеспечивает при одинаковых углах атаки большие значения C_{ya} , чем профили серии Clark-YH. Кроме того, повысилась верхняя граница диапазона безотрывного обтекания до $\alpha = 8^\circ$, что даже лучше, чем у более толстого профиля Clark-YH-8%, для которого этот диапазон ограничен значением $\alpha = 5^\circ$.

Своим методом Г.Г.Тумашев исследовал следующие задачи: нахождение формы профиля по заданному распределению скорости; модификация профиля с целью изменения коэффициента момента профиля; построение профиля по заданному распределению скорости при обтекании циркуляционным потоком идеальной жидкости; построение профиля по заданному распределению скорости при обтекании с отрывом струй; нахождение формы профилей, составляющих биплан, по известному распределению скорости; построение профиля по заданному распределению скорости в ограниченном потоке. Далее Г.Г.Тумашев разработал приближенный метод решения обратной задачи, основанный на использовании уравнений С.А.Чаплыгина; решил задачу построения профиля в потоке сжимаемой жидкости с распределением скорости, близким к заданному; предложил численный метод нахождения формы профиля по заданному распределению скорости – и это в то время, когда об ЭВМ не было и речи, в 1946 году. В последующие годы не только сам Г.Г.Тумашев, но и многие его ученики и последователи продолжили исследования в этом направлении (см., например, [5], [9]).

В последнее десятилетие новые результаты в постановках и решениях ОКЗА были получены на основе метода квазирешений этих задач. К их числу следует отнести обобщения на случай учета сжимаемости (по модели газа Чаплыгина) и вязкости потока (по модели пограничного слоя); проникаемые профили (точечные особенности,

шанные ОКЗА (см., например, [7]).

В компактной форме достижения и нерешенные проблемы можно сформулировать следующим образом.

Достижения

- 1) Обобщение на случай учета сжимаемости дозвукового потока и вязкости при безотрывном и отрывном обтеканиях.
- 2) Профили с устройствами управления внешним потоком и пограничным слоем.
- 3) Безотрывно обтекаемые профили в диапазоне углов атаки.
- 4) Профили гидродинамических решеток (плоские неподвижные и вращающиеся решетки на осесимметричной поверхности тока).
- 5) Смешанные обратные краевые задачи аэрогидродинамики.
- 6) Задачи аэродинамической оптимизации формы крыловых профилей.

Проблемы

- 1) Получение условий разрешимости и физической реализуемости, выраженных через исходные данные задачи.
- 2) Описание множества корректности решения ОКЗА через исходные данные и построение квазирешения.
- 3) ОКЗА для профиля крыла экраноплана в диапазоне углов атаки и отстояний от экрана; обобщение на случай учета пограничного слоя на профиле и экране.
- 4) Аэродинамическая оптимизация форм крыловых профилей экранопланов.
- 5) Обобщение экстремальной задачи М.А.Лаврентьева в теории крыла аэроплана на случай наличия экрана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 99-01-00365, 99-01-04029), программы “Университеты России” и фонда НИОКР АНТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangler W. *Die Berechnung eines Tragflugelprofiles mit vorgeschriebener Druckverteilung* //Jahrb. Deutsch. Luftfahrtforschung. – 1938. – Bd. 1. – S. 46–53.
2. Тумашев Г.Г. *Нахождение формы профиля по заданному распределению скорости с учетом сжимаемости жидкости* //Изв. Казан. физ.- мат. об-ва. – 1945. – Т. 13. – Сер. 2. – С. 127- 132.
3. Тумашев Г.Г. *Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления* //Уч. зап. Казан. ун-та. – 1952. – Т. 112. – Кн. 3. - С. 3–41.
4. Степанов Г.Ю. *Гидродинамика решеток турбомашин.* – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
5. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* 2-е издание. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
6. Eppler R. *Airfoil design and data.* – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 562 p.
7. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 440 с.
8. Ильинский А.Н., Ильинский Н.Б., Маклаков Д.В., Поташев А.В. *Методы аэродинамического проектирования крылового профиля экраниплана* //Изв. вузов. Авиаци. техника. – 1995. – № 2. – С. 54–63.
9. Аксентьев Л.А., Ильинский Н.Б., Нужин М.Т., Салимов Р.Б., Тумашев Г. Г. *Теория обратных краевых задач для аналитических функций и их приложения* //Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: ВИНТИ, 1980. – Т. 18. – С. 67–124.